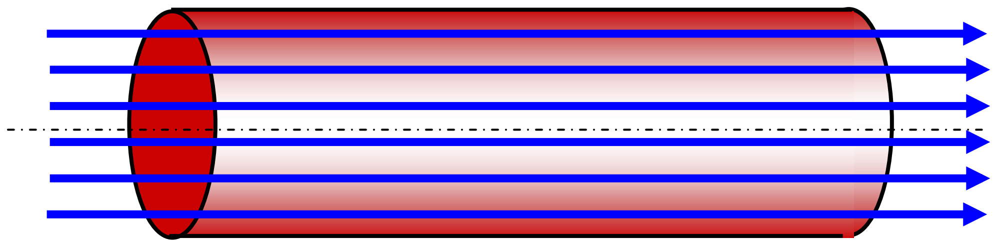
Stromingsleer

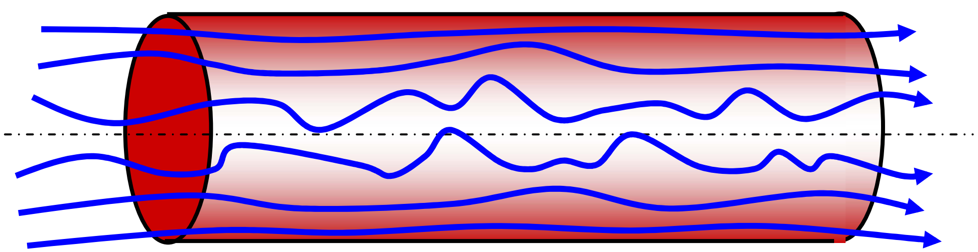
- laminaire stromingen
- drukval bij turbulente stroming door rechte buizen
- drukval in bochten en afsluiters
- drukval in leidingsystemen

Laminair en turbulent (1)

Laminaire stroming:

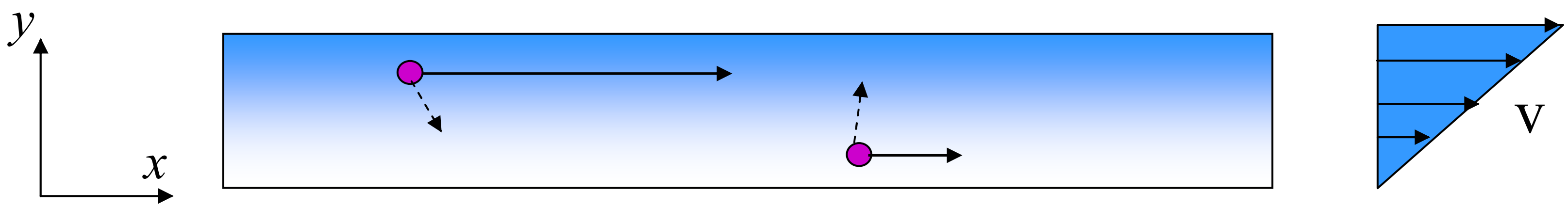


Turbulente stroming:



- Bereken altijd eerst Reynolds
- $$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\eta}$$
- als Re > 4000 turbulent
  als Re < 2100 laminair

Laminair en turbulent (2)



Impulstransport ⊥ stroming

Laminaire stroming
- *moleculaire interacties*
- *Brownse beweging*

Turbulente stroming
- *moleculaire interacties*
- *Brownse beweging*
- *wervels*

bewegingsvergelijking

Voor een vast lichaam:

$$\sum K_x = \frac{d\left(Mv_x\right)}{dt}, \sum K_y = \frac{d\left(Mv_y\right)}{dt}, \sum K_z = \frac{d\left(Mv_z\right)}{dt}$$

Voor een vloeistof:

$$\frac{d\left(Mv_x\right)}{dt} = \Phi_{m,in} v_{x,in} - \Phi_{m,uit} v_{x,uit} + \sum K_x$$

$$\frac{d\left(Mv_y\right)}{dt} = \Phi_{m,in} v_{y,in} - \Phi_{m,uit} v_{y,uit} + \sum K_y$$

$$\frac{d\left(Mv_z\right)}{dt} = \Phi_{m,in} v_{z,in} - \Phi_{m,uit} v_{z,uit} + \sum K_z$$

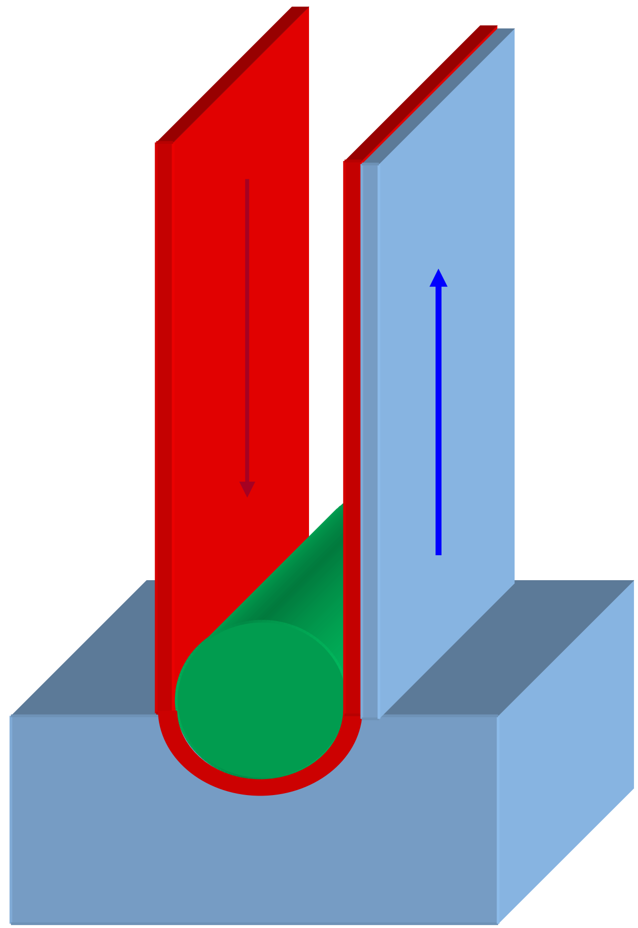
Coating processen, de vallende film

Coaten van:

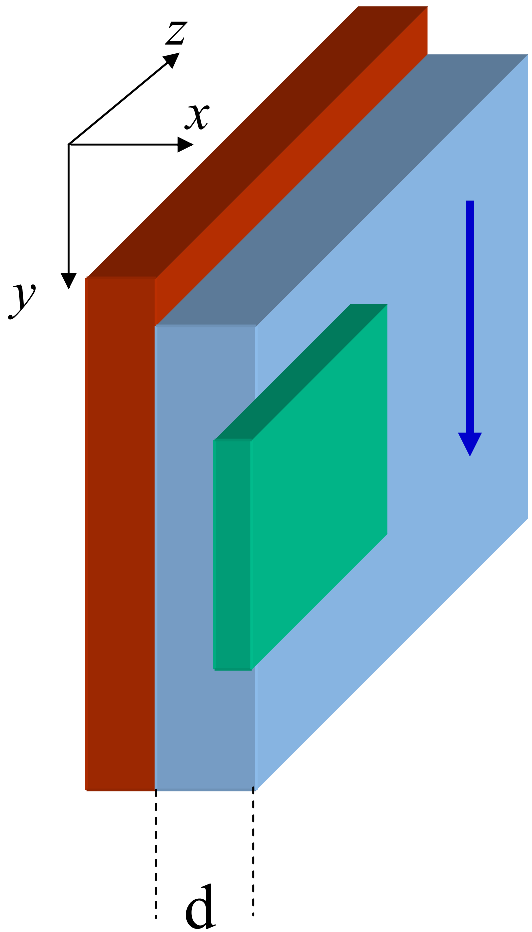
- lijm
- lak
- polymeer

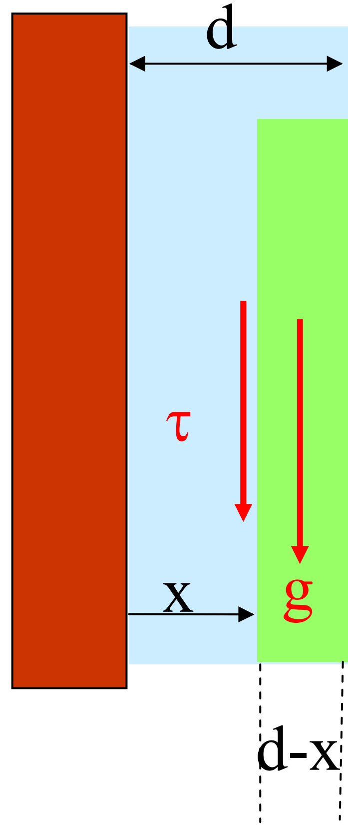
Voorbeelden:

- stickers
- transfers
- melkpakken
- geplastificeerd doek



De vallende film (1)





Stationaire stroming:

$$\sum K = 0$$

dus:

$$\rho g\left(d - x\right) + \tau_{xy} = 0$$

en:

$$\tau_{xy} = -\eta \frac{dv_y}{dx}$$

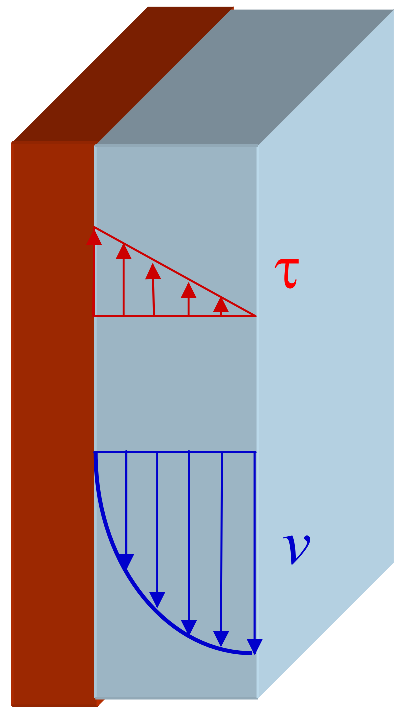
De vallende film (2)

$$\frac{dv_y}{dx} = \frac{\rho g}{\eta}\left(d - x\right)$$

Rvw: v = 0 op x = 0

$$\int dv_y = \int \frac{\rho g}{\eta}\left(d - x\right)dx$$

$$v_y = \frac{\rho g}{\eta}\left(xd - \frac{x^2}{2}\right) + \cancel{c}$$



De vallende film (3)

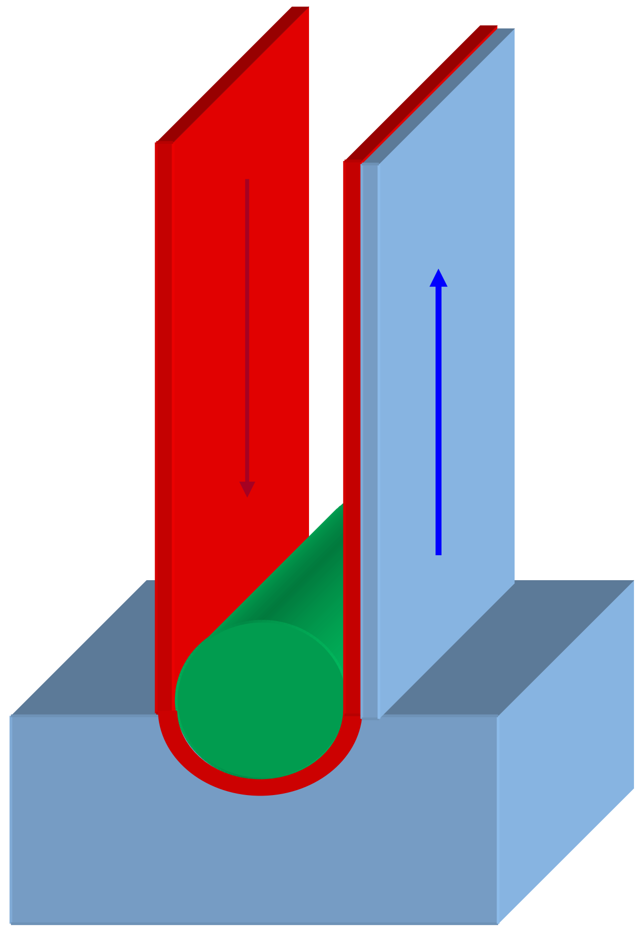
$$v_y = \frac{\rho g}{\eta}\left(xd - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$< v_y > d = \Phi_v = \int_0^d v_y dx = \frac{\rho g d^3}{3\eta}$$

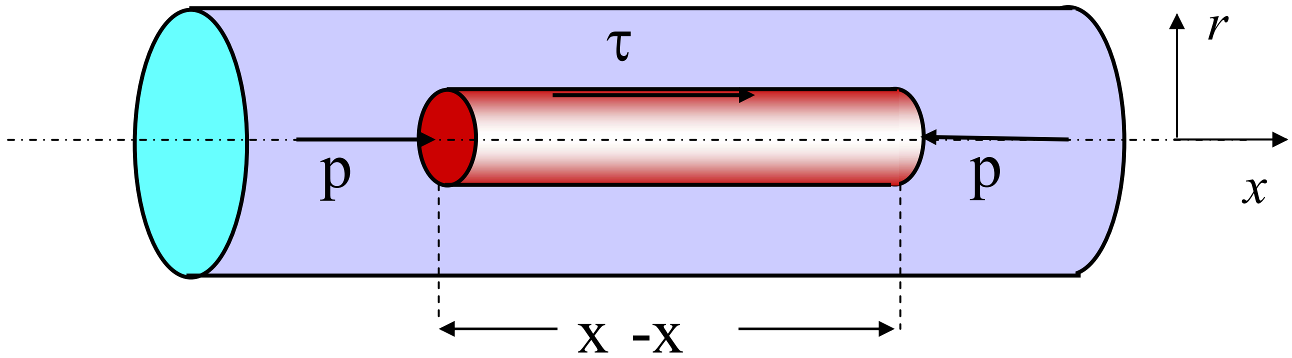
$$dus:$$

$$< v_y >= \frac{2}{3} v_{\max}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{3\eta\Phi_v}{\rho g}}$$



Laminaire stroming in een ronde buis (1)



Krachtenbalans:

$$0 = \pi r^2 p_1 - \pi r^2 p_2 - \tau_{rx} 2\pi r \left(x_2 - x_1\right)$$

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2} \frac{p_1 - p_2}{x_2 - x_1} = \frac{r}{2}\left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

$$\tau_{rx} = -\eta \frac{dv_x}{dr}$$

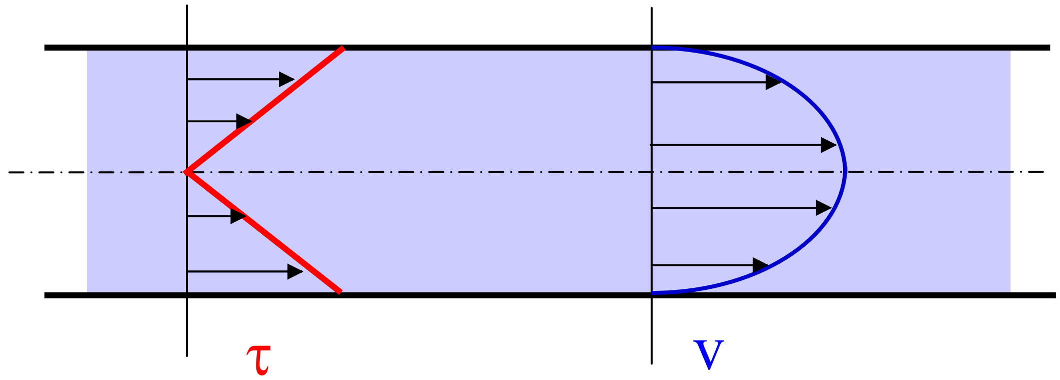
Laminaire stroming in een ronde buis (2)

$$v_x = \frac{1}{4\eta}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(R^2 - r^2\right)$$

$$v_{x,\max} = \frac{1}{4\eta}\left(-\frac{dp}{dx}\right)R^2$$

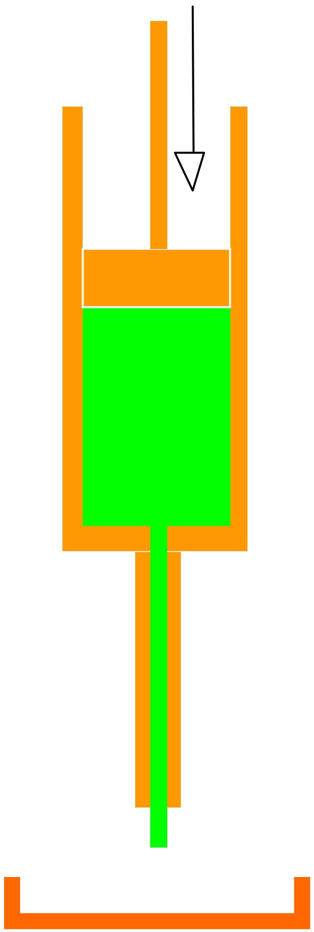
$en:$

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



$$\Phi_v = \int_0^R 2\pi r v_x dx = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \pi R^2 \frac{v_{x,\max}}{2}$$

viscositeitsmetingen

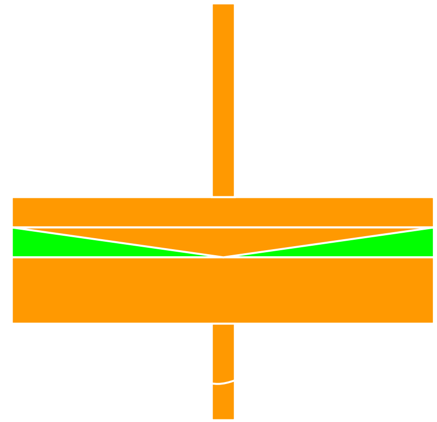


capillair reometer

Viscositeiten:

water	*1 mPa.s*
glycerol	*1000 mPa.s*
volle melk	*2,1 mPa.s*
half volle melk	*1,4 mPa.s*
olijfolie	*84 mPa.s*
honing	*11000 mPa.s*

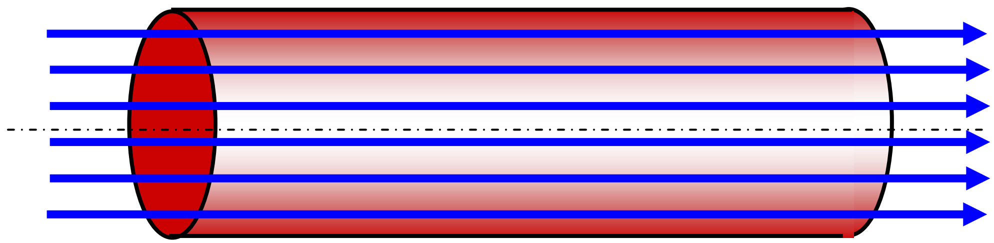
$$\eta = \frac{\pi R^4}{8\Phi_V}\left(\frac{p}{L}\right)$$



kegel-en-plaat reometer

Laminair en turbulent

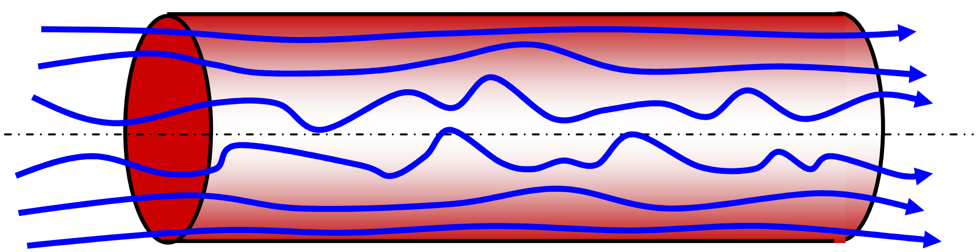
Laminaire stroming:



Impulstransport ⊥ stroming

- *moleculaire interacties*
- *Brownse beweging*

Turbulente stroming:



Impulstransport ⊥ stroming

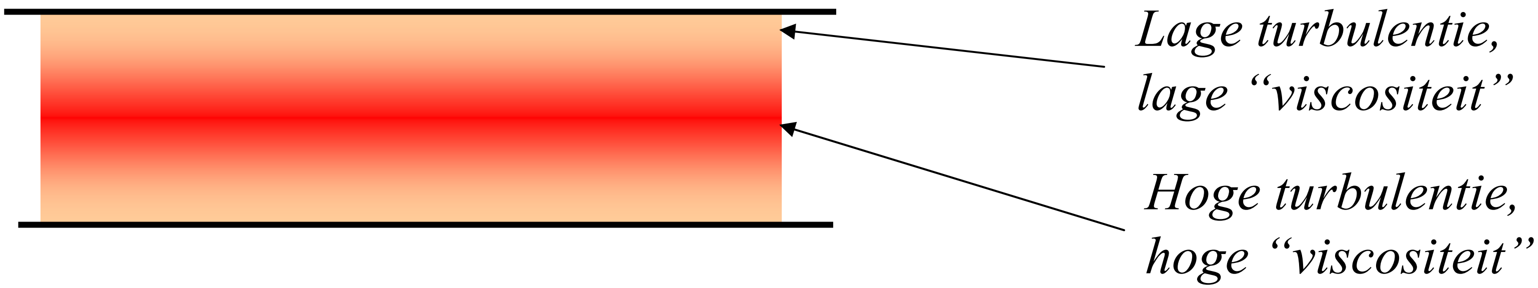
- *moleculaire interacties*
- *Brownse beweging*
- *wervels*

Ergo: 1) impulsoverdracht is groter bij turbulente stroming

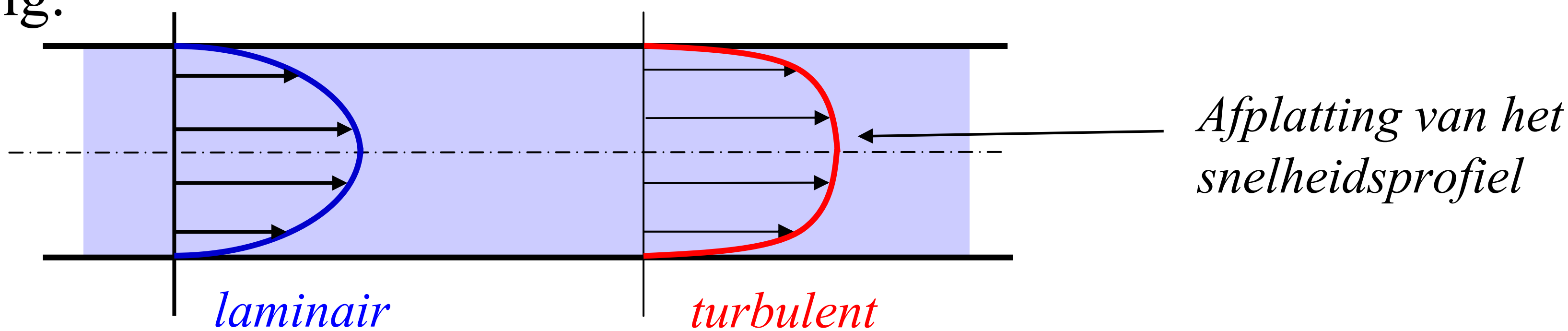
2) turbulentie is het grootst in het midden van de buis

Turbulente stromingen

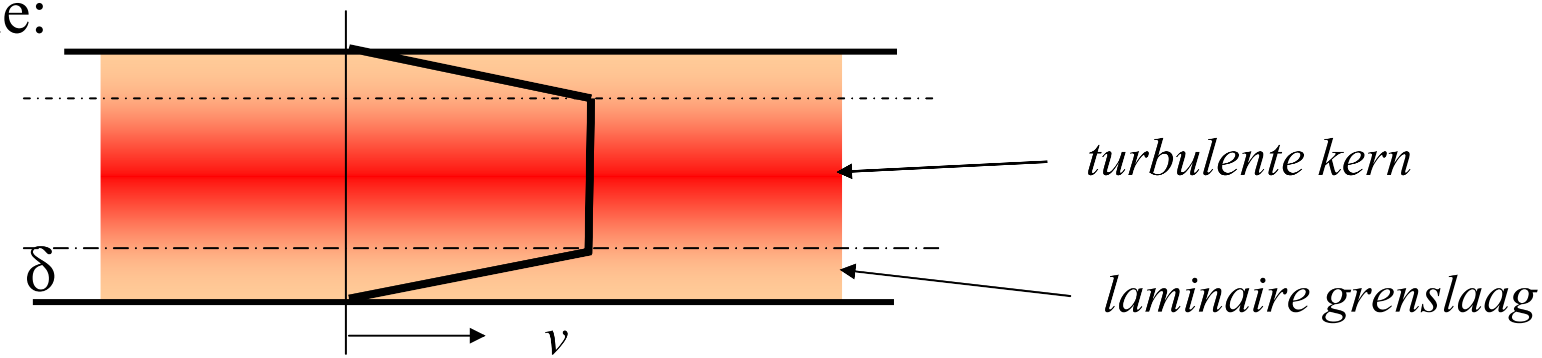
Oorzaak:



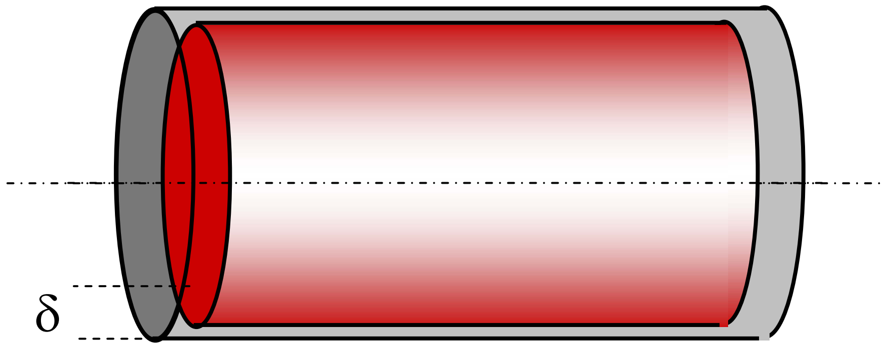
Gevolg:



Idealisatie:



Drukval bij turbulente stroming



$$p_1 F - p_2 F + \tau_{w-f} S(x_2 - x_1) = 0$$

$$p_1 - p_2 = \tau_{f-w} \frac{S(x_2 - x_1)}{F}$$

$$\tau_{f-w} = f(\rho, \eta, <v>, D_i, vorm)$$

$$\left[\frac{M}{LT^2}\right] = f\left[\frac{M}{L^3}, \frac{M}{LT}, \frac{L}{T}, L\right]$$

$$\frac{\tau_{f-w}}{\rho <v>^2} = f\left(\frac{\rho <v> D_i}{\eta}\right) = f(\mathrm{Re})$$

$$\tau_{f-w} = f.\frac{1}{2}\rho <v>^2$$

$$p_1 - p_2 = f\frac{1}{2}\rho <v>^2 \frac{S(x_2 - x_1)}{F}$$ Fanning vergelijking

De frictiefactor

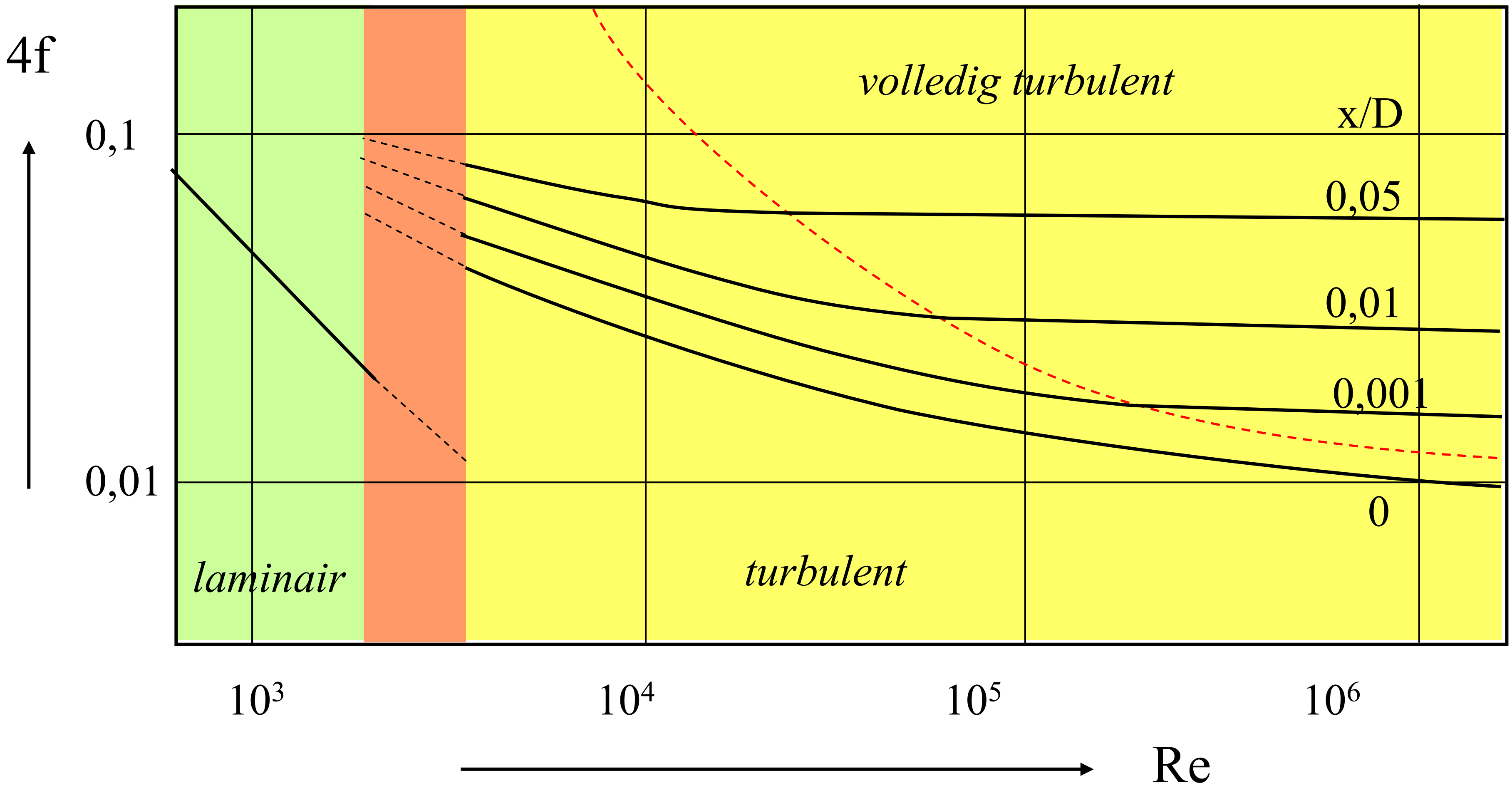
$$p_1 - p_2 = f\,\frac{1}{2}\rho < v >^2 \frac{S(x_2 - x_1)}{F}$$

$$= 4f.\frac{1}{2}\rho < v >^2 .\frac{x_2 - x_1}{D}$$

f: frictiefactor

- laminaire buisstroming: $4f = 64\frac{\eta}{\rho v D} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$
- turbulentie in gladde buizen: $4f = 0{,}316.\mathrm{Re}^{-\frac{1}{4}}$
- turbulentie in ruwe buizen: beetje meer

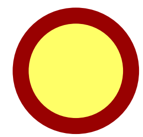
Frictiefactoren



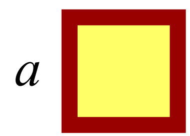
Frictiefactoren

- bereken Reynolds
- indien laminair: 4f = 64/Re
- indien turbulent: lees 4f af uit de grafiek
- *grafiek is ook te gebruiken voor kanalen met niet-cirkelvormige diameter bij gebruik van natte diameter*

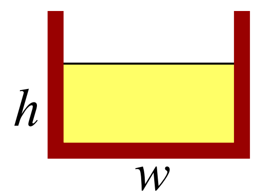
Natte diameters: $D = \dfrac{4 \times oppervlak}{omtrek}$



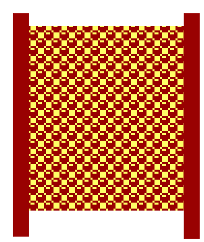
$$\frac{\pi D^2}{\pi D} = D$$



$$\frac{4a^2}{4a} = a$$



$$\frac{4hw}{w+2h}$$



$$\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}D$$

Oliepijpleiding

Leidingsystemen

gegeven Φ

gevraagd Δp

bereken v

bereken Re

zoek op $4f$

$\Delta p = 4f . 1/2\ \rho <v>^2 L/D$

gegeven Δp

gevraagd Φ

v onbekend
Re onbekend
4f onbekend

iteratief

speciale grafiek

Bij gegeven drukval

$$p_1 - p_2 = \boxed{4f} . \frac{1}{2} \rho \boxed{< v >^2} . \frac{x_2 - x_1}{D}$$

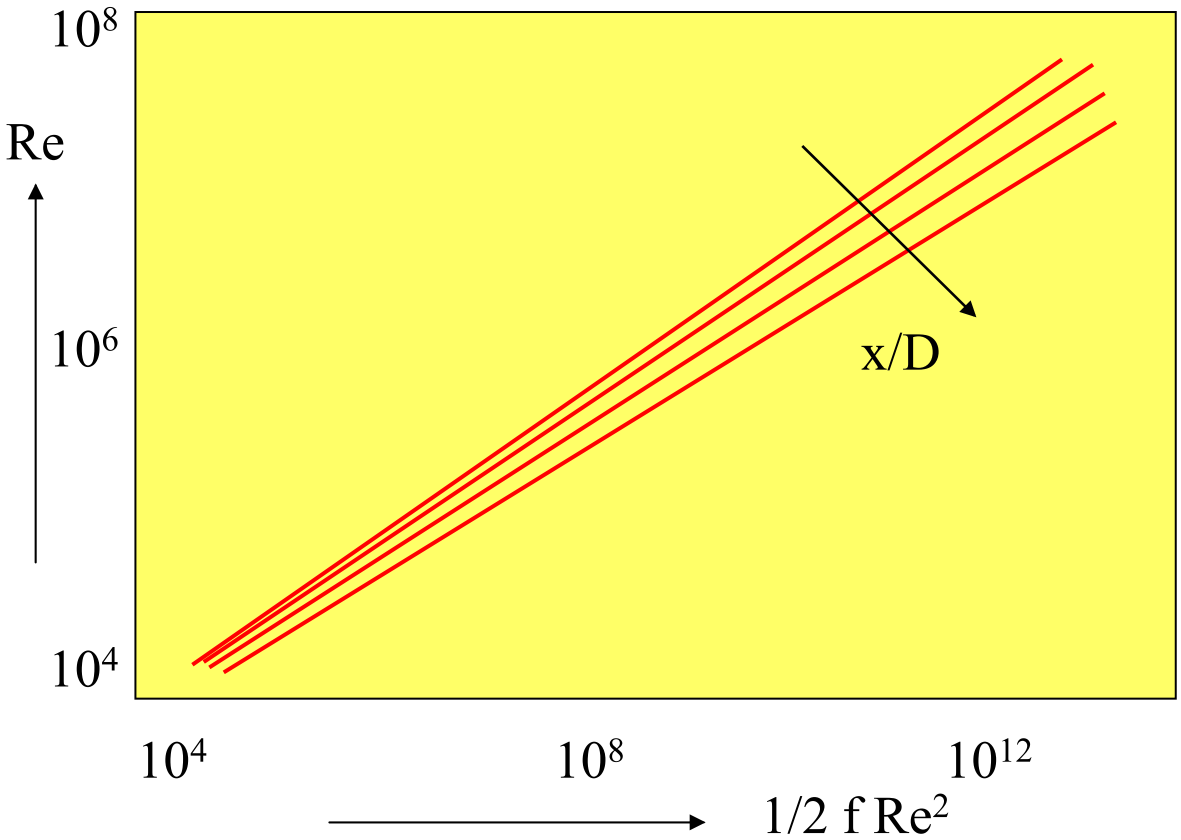
?

Met f(Re)

$$\boxed{\frac{(p_1 - p_2)\rho D_i^3}{4\eta^2 (x_2 - x_1)}} = \frac{1}{2} f \left(\frac{\rho < v_x > D_i}{\eta} \right)^2 = \frac{1}{2} f . \mathrm{Re}^2$$

bekend

Bij gegeven drukval



- bepaal:

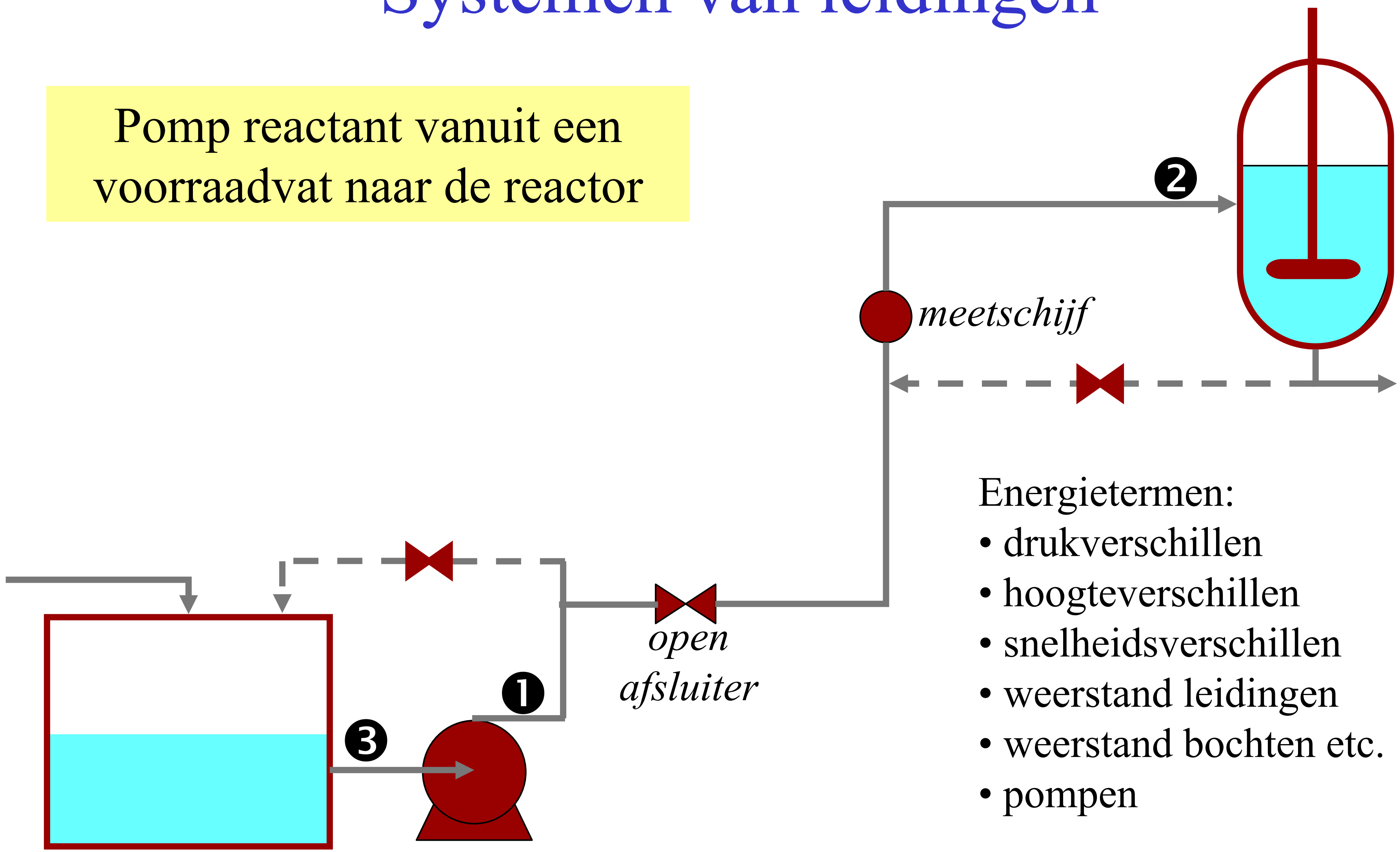
$$\frac{(p_1 - p_2)\rho D_i^3}{4\eta^2 (x_2 - x_1)} = \frac{1}{2} f . \mathrm{Re}^2$$

- zoek Re op
- bereken <v>

Tip: deze grafiek niet gebruiken als Re berekend kan worden

Systemen van leidingen

Pomp reactant vanuit een voorraadvat naar de reactor



Energietermen:

- drukverschillen
- hoogteverschillen
- snelheidsverschillen
- weerstand leidingen
- weerstand bochten etc.
- pompen

Energiebalans voor mechanische energie:

Wat zijn de mechanische energietermen *per massa-eenheid?*

drukenergie	$\int \frac{1}{\rho} dp$
potentiële energie	gh
kinetische energie	$\frac{1}{2} \langle v \rangle^2$
pompvermogen	Φ_A / Φ_m
inwendige wrijving	A_{wr}

Bernoulli vergelijking

Energiebalans voor mechanische energie tussen punt 1 en punt 2:

$$0 = -\left\{\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp + g\left(h_2 - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(\langle v_2\rangle^2 - \langle v_1\rangle^2\right)\right\}\Phi_m + \Phi_A - A_{wr}\Phi_m$$

drukenergie

potentiële energie

kinetische energie

pompvermogen

wrijvingsverliezen

Voor incompressibele media:

$$0 = -\left\{\boxed{\frac{p_2 - p_1}{\rho}} + g\left(h_2 - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(\langle v_2\rangle^2 - \langle v_1\rangle^2\right)\right\}\Phi_m + \Phi_A - A_{wr}\Phi_m$$

Daniël Bernoulli (1700-1782)

1700: op 29 januari geboren in de Boteringestraat Groningen
zoon van Johann Bernoulli, Hoogleraar Wiskunde RuG
1721: afgestudeerd Medicijnen Univ. Bern
1725 (!): hoogleraar Wiskunde Univ. St. Petersburg
1733: hoogleraar Anatomie en Botanie Univ. Basel
1750: hoogleraar Natuurkunde en Speculatieve Filosofie

Publiceerde in 1738 de (vereenvoudigde) Bernoullivergelijking
in zijn boek:
"Hydrodynamica Sive de Motibus Fluidorum"

Wrijving

$$0 = -\left\{ \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\left(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2\right) \right\} \Phi_m + \Phi_A - A_{wr} \Phi_m$$

$$A_{wr} = \sum_i \left(f . \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \frac{SL}{F} \right)_i + \sum_j \left(K_w . \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_j$$

Wrijving in rechte stukken buis

Wrijving in bochten, afsluiters etc.

Met:
f = frictiecoefficient
K = weerstandsgetal

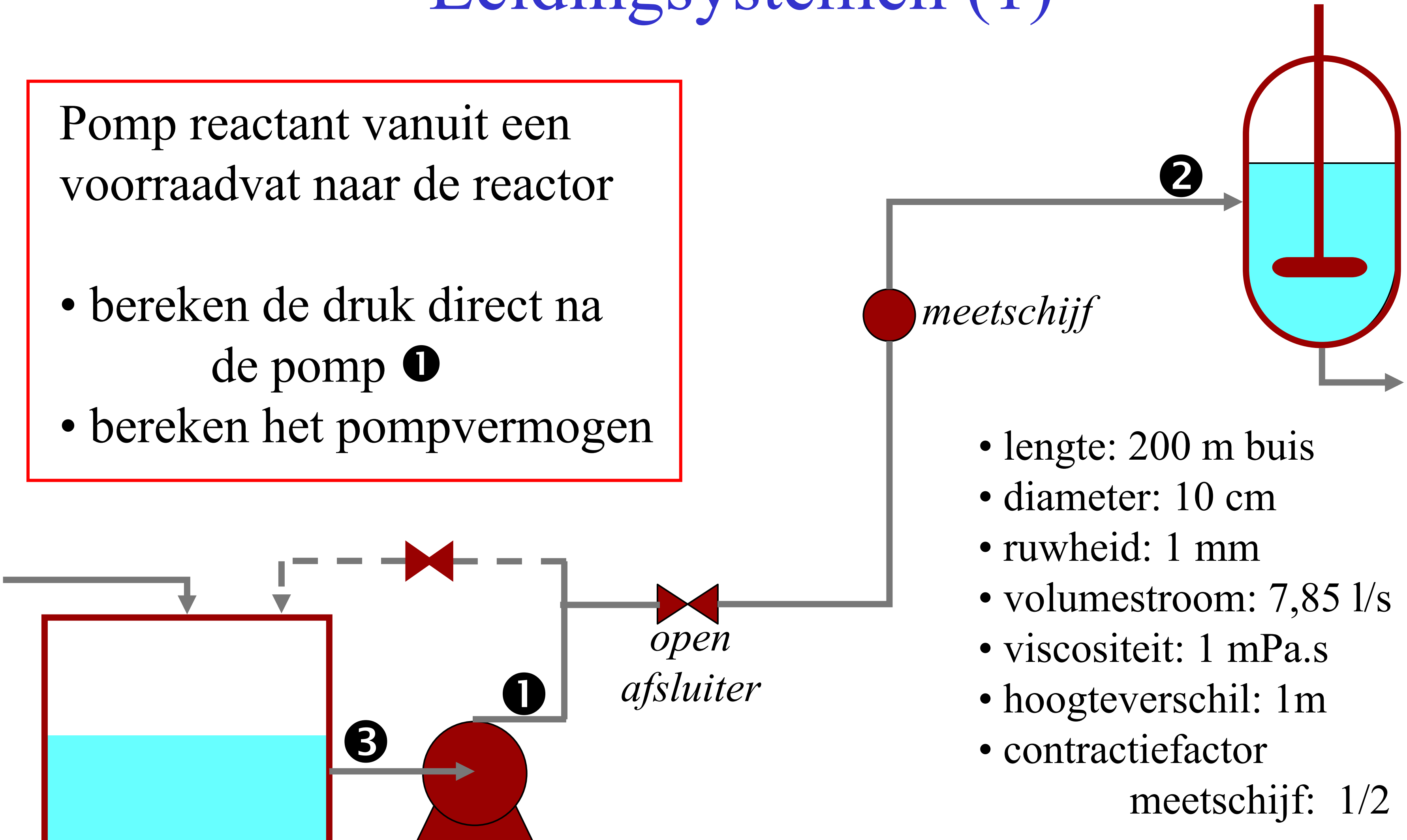
Voorbeelden van K waarden:

flauwe bocht 90^0	0,4-0,6
scherpe bocht 90^0	1,3-1,9
open schuifafsluiter	0,2
1/2 dichte schuifafsluiter	6
open bolafsluiter	6-10

Leidingsystemen (1)

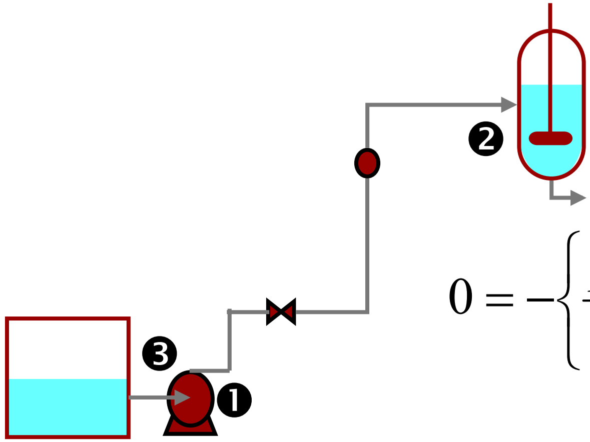
Pomp reactant vanuit een voorraadvat naar de reactor

- bereken de druk direct na de pomp ❶
- bereken het pompvermogen



- lengte: 200 m buis
- diameter: 10 cm
- ruwheid: 1 mm
- volumestroom: 7,85 l/s
- viscositeit: 1 mPa.s
- hoogteverschil: 1m
- contractiefactor meetschijf: 1/2

Leidingsystemen (2)



$$0=-\left\{\frac{p_2-p_1}{\rho}+g\left(h_2-h_1\right)+\cancel{\frac{1}{2}\left(\langle v_2\rangle^2-\langle v_1\rangle^2\right)}\right\}\Phi_m+\cancel{\Phi_A}-A_{wr}\Phi_m$$

$$0=-\frac{p_2-p_1}{\rho}-g\left(h_2-h_1\right)-A_{wr}$$

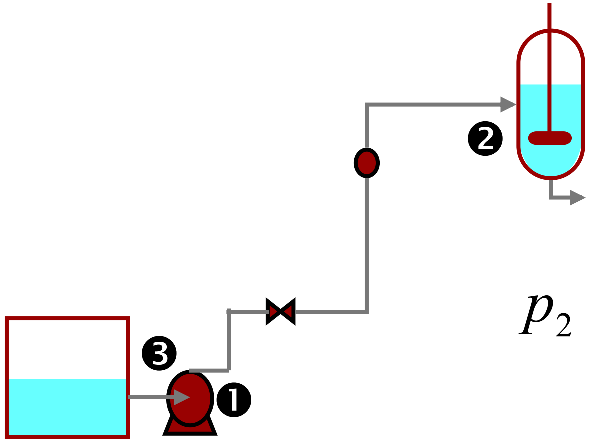
$$p_2-p_1=\rho g\left(h_2-h_1\right)-\rho A_{wr}$$

$$p_2-p_1=\rho g\left(h_2-h_1\right)+4f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2+\sum K_w\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2$$

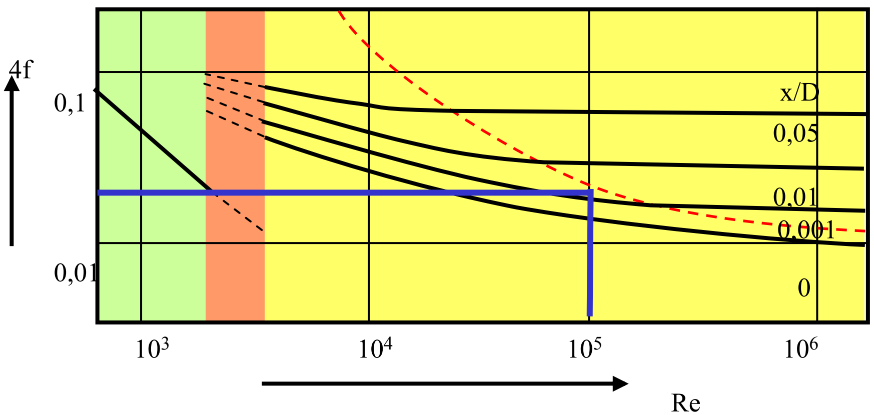
$$met:\langle v\rangle=\frac{\Phi_v}{\frac{\pi}{4}D_i^2}=\frac{7{,}85*10^{-3}}{\frac{\pi}{4}.10^{-2}}=1\ \ m/s$$

$$en:\mathrm{Re}=\frac{\rho v D_i}{\eta}=10^5\quad \text{dus turbulent}$$

Leidingsystemen (3)

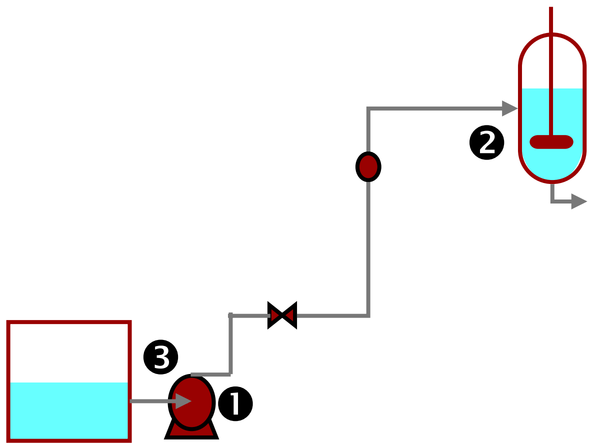


$$p_2 - p_1 = \rho g\left(h_2 - h_1\right) + \boxed{4f}\,\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2 + \boxed{\sum K_w}\,\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2$$



4 bochten:	4*0,8 =	3,2
schuifafsluiter		0,2
meetflens		<u>4,1</u>
ΣK		7,5

x/D = 0,01
Re = 10^5
4f = 0,038



Leidingsystemen (4)

Invullen:

druk op ❶: p -p = 5,2.10^4 Pa

pompvermogen: Bernouilli tussen ❷ en ❸
(verwaarloos aanzuigleiding)

$$0 = -\left\{ \cancel{\frac{p_2 - p_3}{\rho}} + g(h_2 - h_3) + \frac{1}{2}\cancel{\left(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_3 \rangle^2 \right)} \right\} \Phi_m + \Phi_A - A_{wr}\Phi_m$$

$$0 = -g(h_2 - h_3)\Phi_m + \Phi_A - A_{wr}\Phi_m$$

$$\Phi_A = \Phi_m \{ g(h_2 - h_3) + A_{wr} \}$$

$$\Phi_A = \Phi_v \{ \rho g(h_2 - h_3) + \rho A_{wr} \}$$

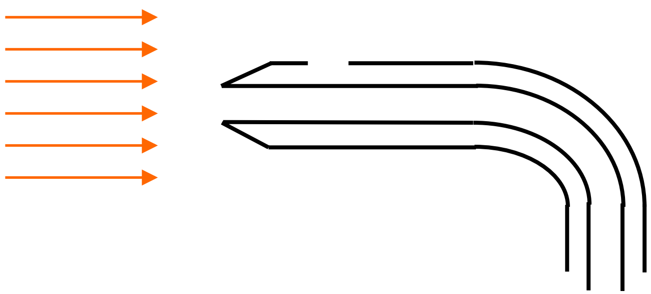
$$\Phi_A = \Phi_v (p_2 - p_1) = 410\, W$$

Wrijvingsloze stromingen zonder pomp

$$0 = -\left\{ \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\left(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2\right) \right\} \Phi_m + \cancel{\Phi_A} - \cancel{A_{wr}} \Phi_m$$

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{1}{2}\langle v \rangle^2 = \text{constant langs een stroomlijn}$$

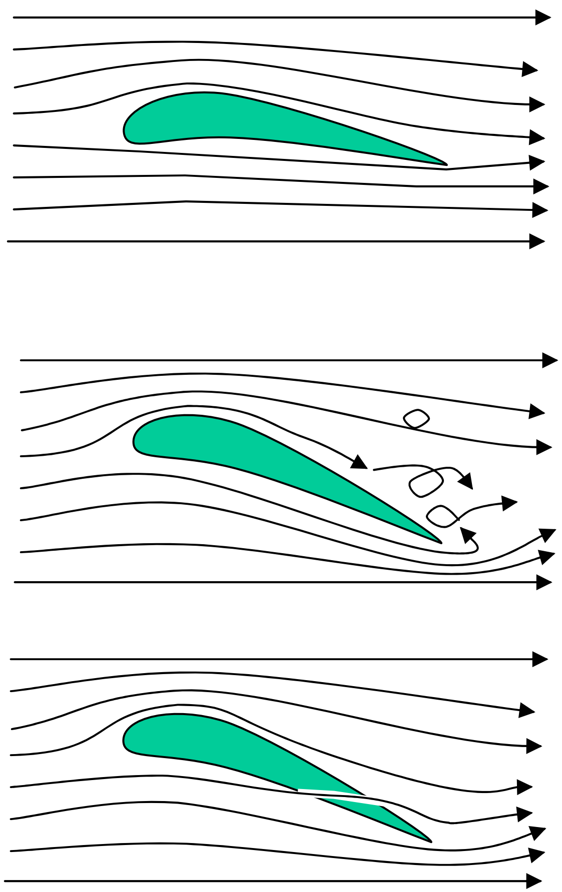
b.v. Pitotbuis:



$$0 = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\langle v_2 \rangle^2} - \langle v_1 \rangle^2\right)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{2\frac{p_2 - p_1}{\rho}}$$

De vliegtuigvleugel



$$\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

ideale gaswet

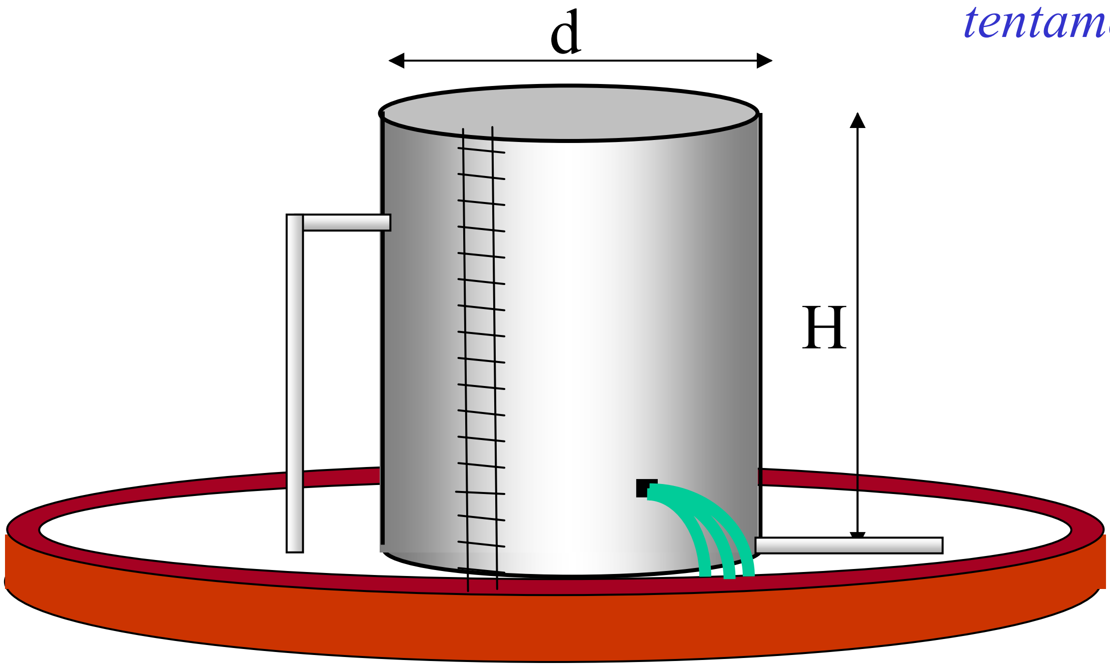
$$pV = RT \Rightarrow p\frac{M}{\rho} = RT$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = \frac{RT}{M}\int_1^2 \frac{dp}{p} = \frac{RT}{M}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \exp\left\{\frac{M}{2RT}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\right\}}$$

Calamiteit met een tank

tentamen TS b juni 2000



d =10 m, H = 15 m (V = 1187 m^3)

gevraagd: grootte opvangbak

<u>"Worst-case" scenario:</u>

- tank helemaal vol
- gat helemaal beneden
- gatdoorsnede 20 cm^2
- leegpompen tank kost een uur

$$0 = -\left\{ \cancel{\frac{p_2 - p_1}{\rho}} + g\left(\cancel{h_2} - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(\langle v_2 \rangle^2 - \cancel{\langle v_1 \rangle^2}\right) \right\} \Phi_m + \cancel{\Phi_A} - \cancel{A_{wr}} \Phi_m$$

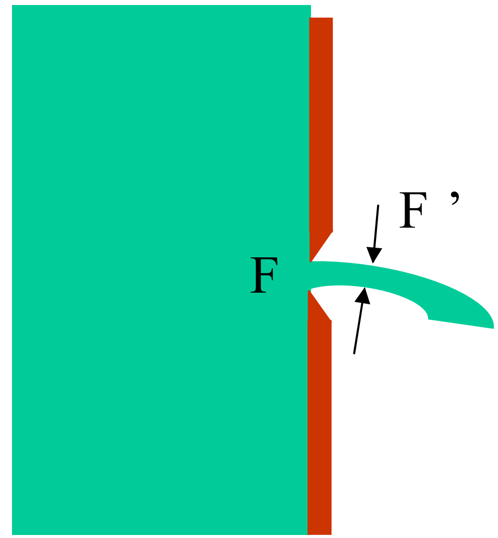
$$g.h_1(t) = \frac{1}{2}\langle v_2(t) \rangle^2$$

Het gat

$$g.h_1(t) = \frac{1}{2}\langle v_2(t)\rangle^2$$

$$v_2(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

$$\Phi_v = F_1'.v(t) = C.C_c.F_1.\sqrt{2gh(t)}$$

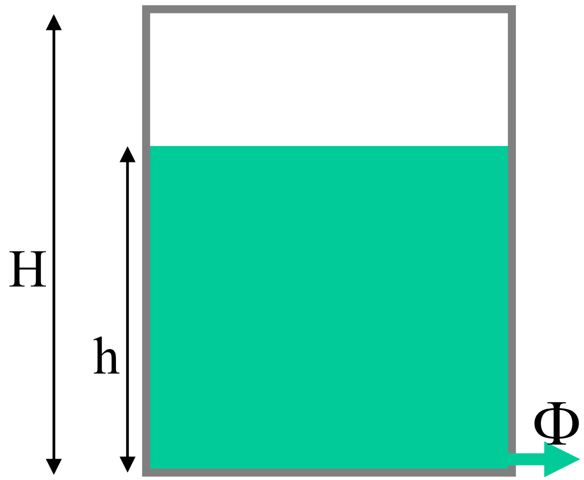


C: doorstroomcoefficient ≈ 1

C : contractiefactor ≈ 0,62

Door insnoering geldt: F ’= 0,62 F

Verlies na een uur



Leegpompen in 1 uur:

$$h(t) = H\left(1 - \frac{t}{3600}\right)$$

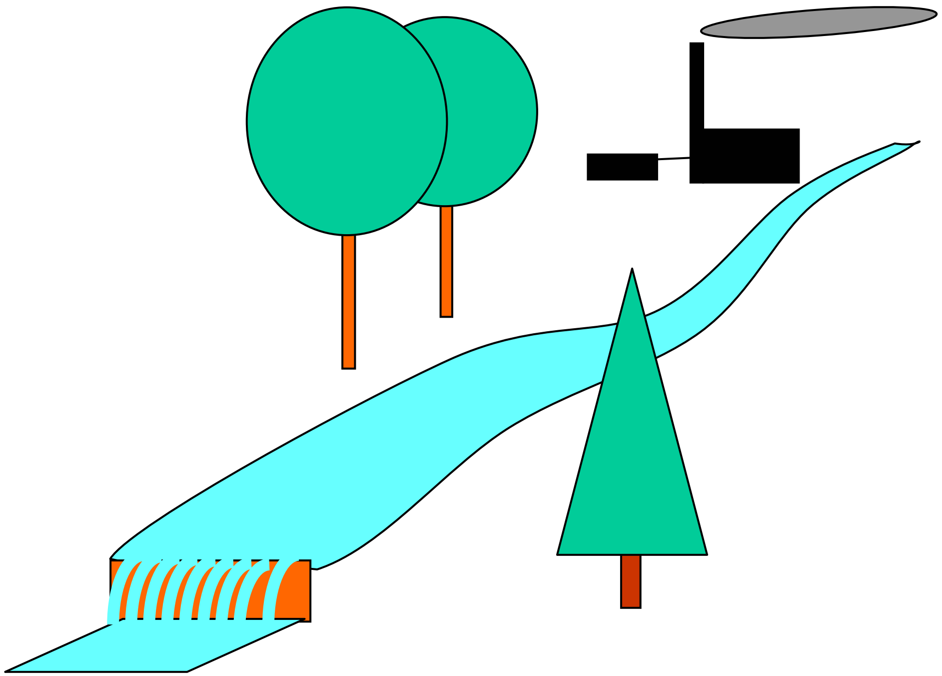
$$\Phi_v = F_1'.v(t) = C.C_c.F_1.\sqrt{2gh(t)}$$

$$= CC_cF_1\sqrt{2gH\left(1 - \frac{t}{3600}\right)}$$

$$V = \int_0^{3600} \Phi_v dt = CC_cF_1\sqrt{2g}\int_0^{3600} \sqrt{H\left(1 - \frac{t}{3600}\right)}dt$$

$$V = CC_cF_1\sqrt{2gH}\,\frac{2}{3}\left(1 - \frac{t}{3600}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{3600} = 37m^3$$

Eenvoudige vervuilingsmonitoring



Na zuivering van afvalwater:

fenollozing 7,2 kg/hr

hinderwetvergunning:

c < 1 ppm (w)

varieerend debiet door het riviertje

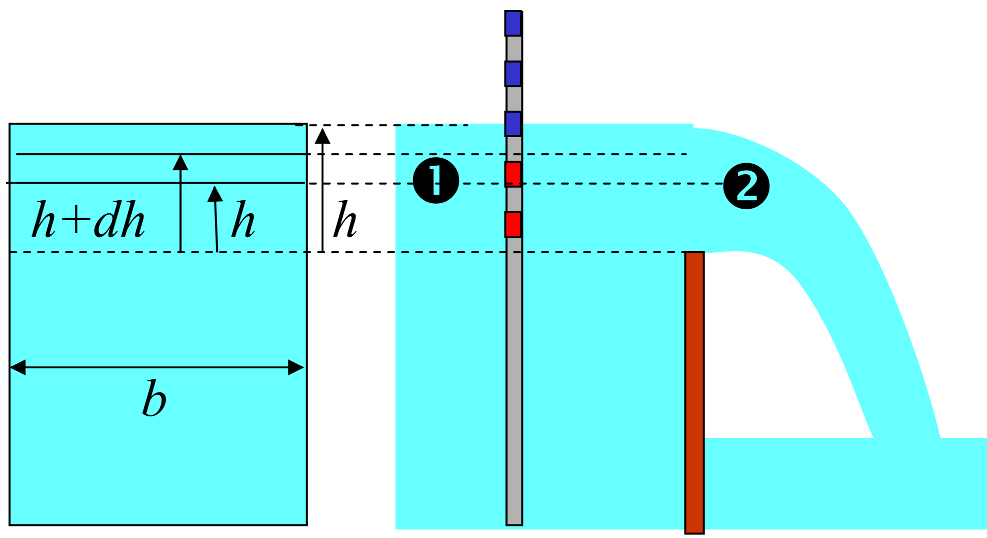
breedte riviertje 10 m

* Waneer moet bij de fenollozing ingegrepen worden?
* Bedenk een eenvoudig monitoring systeem

Waterhoogte boven de stuw

Fenollozing: 9 kg/hr = 2,5 * 10^{-3} kg/s fenol
max concentratie: 10^{-6} kg/kg
minimaal waterdebiet: 2,5 * 10^{3} kg/s = 2,5 m^{3}/s

Bernouilli over de stuw:

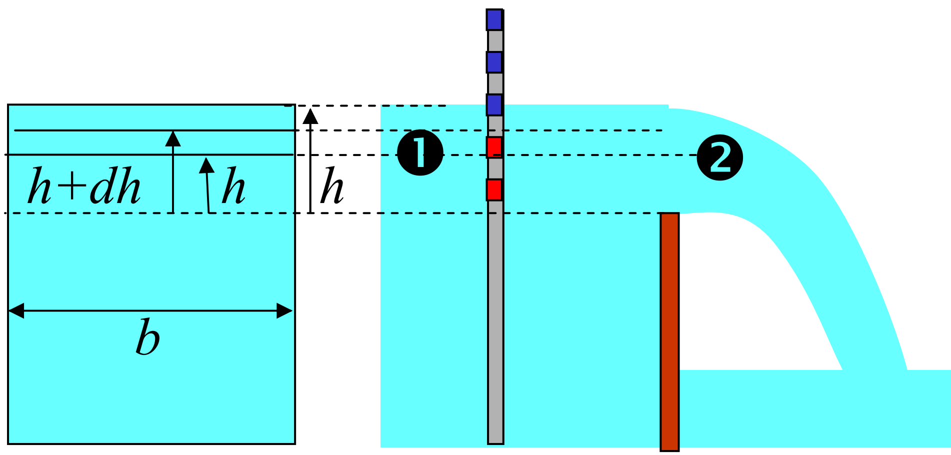


$$p \;\; = p \;\; + \rho g h$$
$$p \;\; = p$$

De oplossing

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \cancel{g(h_1 - h_2)} + \frac{1}{2}\left(\cancel{v_1^2} - v_2^2\right) = 0$$

$$\frac{\cancel{p_0} + \rho g h - \cancel{p_0}}{\rho} - \frac{1}{2}v_2^2 = 0$$



$$v_h = \sqrt{2g(h_0 - h)}$$

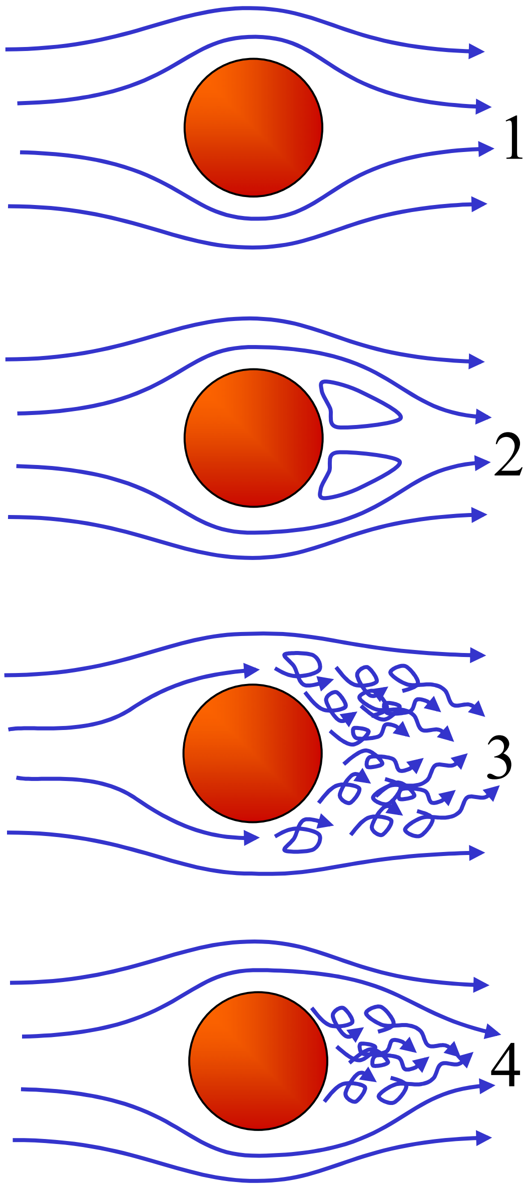
$$d\Phi_V = v_h.b.dh$$

$$\Phi_V = b\sqrt{2g}\int_0^{h_0}\sqrt{h_0 - h}\,dh$$

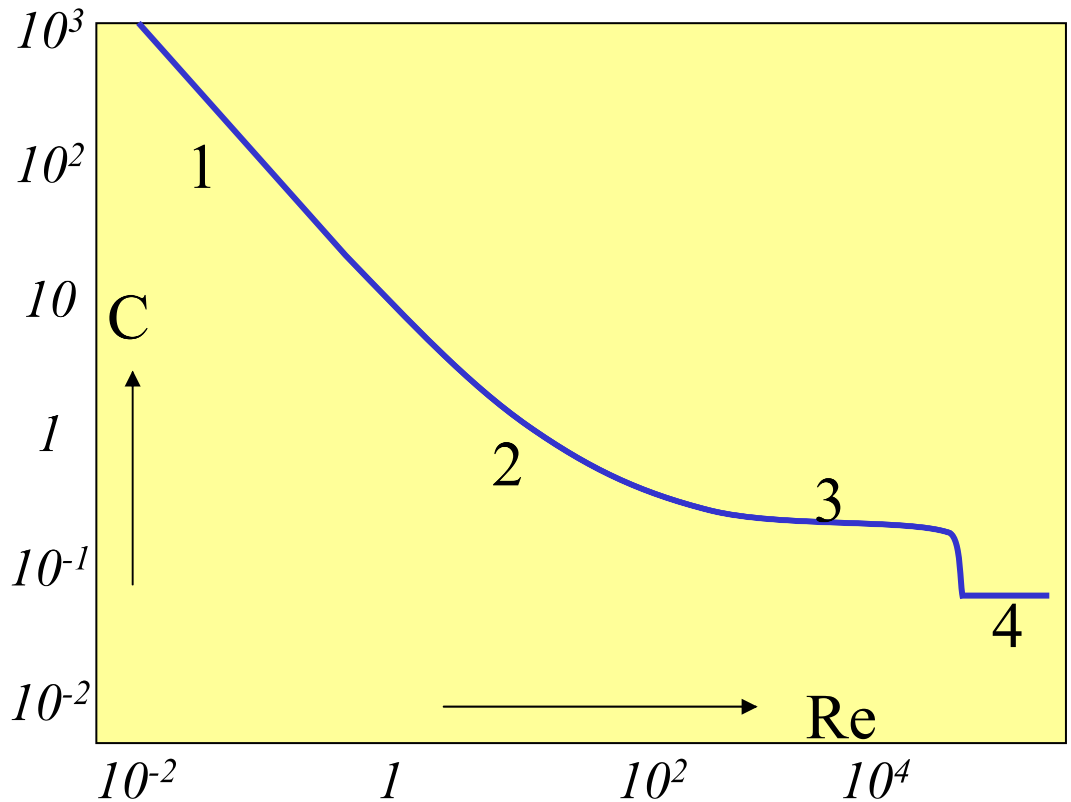
$$= \frac{2}{3}b\sqrt{2gh_0^3}$$

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2g}\left(\frac{3\Phi_V}{2b}\right)^2} = 19\,cm$$

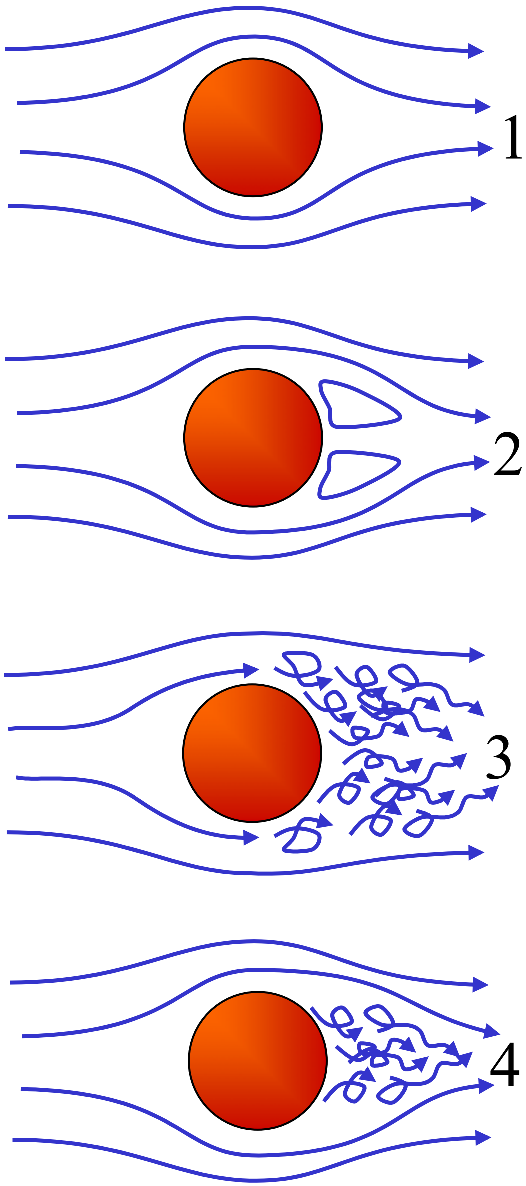
Stroming om een voorwerp



$K = C \quad F \quad .1/2\ \rho v^2$



Stromingsregimes



1) Stokes stroming, laminaire
 aangesloten stroming
 $C \;\; = contst./Re$
2) wervelgebied, laminaire
 stroming
3) turbulent zog
 $C \;\; = const$
4) turbulente grenslaag, lagere
 weerstandcoeff.
 $C \;\; = const$

Het autoverkeer

kracht: $K = C \;\; F \; .1/2 \; \rho v^2$

verbruik: $W = K.x = C \;\; F \; .1/2 \; \rho v^2 \; x$

2 keer zo hard, 4 keer zoveel verbruik

vermogen: $P = K.v = C \;\; F \; .1/2 \; \rho v^3$

2 keer zo hard, 8 keer zoveel vermogen

Verbruik evenredig met:

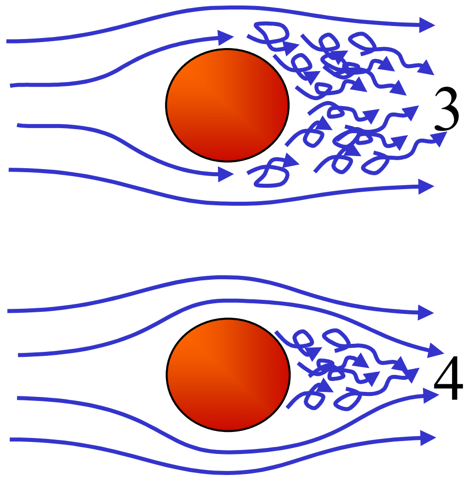
C goede stroomlijn

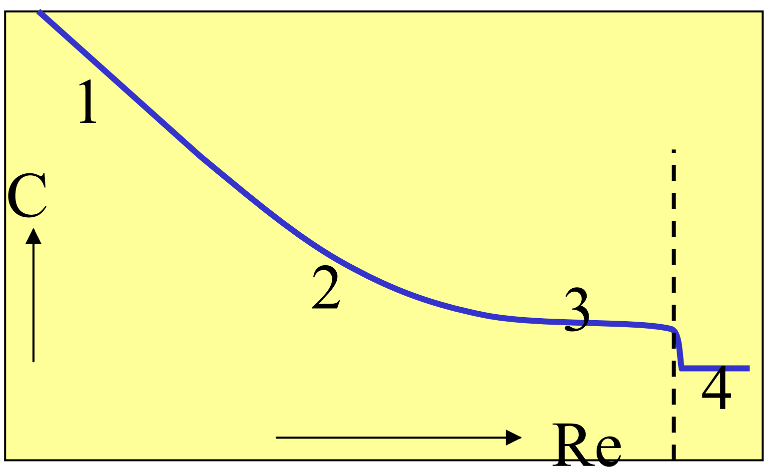
F klein oppervlak

v^2 *lage snelheid, maar……....*

en voor het stadsverkeer: laag gewicht

Maar ……….





Overgang naar lagere C waarde bij Re = 2.10^5

voor een auto:

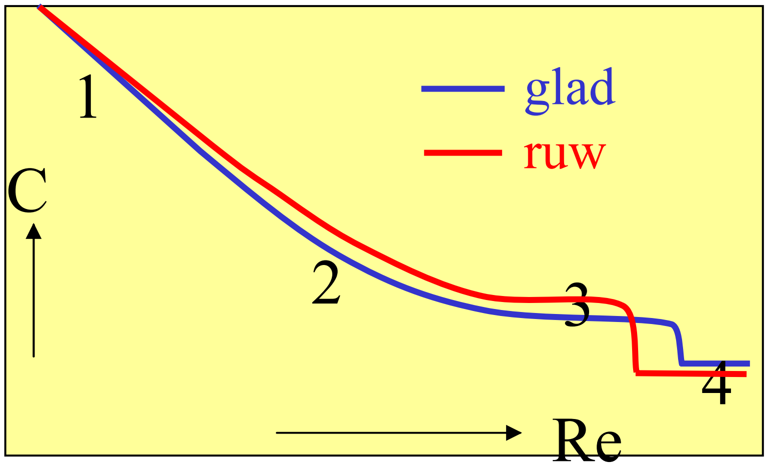
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\eta}$$

$$2.10^5 = \frac{1.v.1,5}{2.10^{-5}}$$

$$v = 2,7 m/s = 10 km/hr$$

Diept dus niet op!

Schaatspakken:



$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\eta}}$$

glad oppervlak:

$$2.10^5 = \frac{1.v.0,4}{2.10^{-5}}$$

$$v = 10\, m/s = 36\, km/hr$$

ruw oppervlak:

$$\mathrm{Re} = 4.10^4$$

$$v = 2\, m/s = 7{,}2\, km/hr$$

En vandaar de ribbels op de nieuwe schaatspakken
maar vooral belangrijk op de armen en benen!